



Universität Karlsruhe (TH)
Forschungsuniversität • gegründet 1825

IIP Institut für Industriebetriebslehre
und Industrielle Produktion (IIP)

Vorlesung Industriebetriebswirtschaftslehre

Prof. Dr. rer. pol. Wolf Fichtner

Inhalte der Vorlesung IBWL

Kapitel 1: Einführung

Kapitel 2: Rechtsformen

Kapitel 3: Finanzierung

Kapitel 4: Externes Rechnungswesen

Kapitel 5: Internes Rechnungswesen

Kapitel 6: Investitionsrechnung

Kapitel 7: Optimierung

Kapitel 8: Marketing und Absatz

Kapitel 9: Projektmanagement

Motivation

- **Vielzahl von Anwendungen in der ein Gütekriterium einen möglichst kleinen oder möglichst großen Wert unter Berücksichtigung verschiedener Randbedingungen annehmen soll:**
 - **Produktions(programm)planung**
Bestimmung der herzustellenden Mengen an Produkten etwa unter Berücksichtigung von benötigten Ressourcen
 - **Transport- und Versorgungsprobleme**
Planung des Transports von Gütern aus Lagern zu Kunden unter Berücksichtigung von Kosten, Lagerbeständen, Lieferzeitpunkten u.ä.
 - **Standortplanung**
Bestimmung der optimalen Standorte für Lagerhäuser, Produktionsanlagen u.ä. unter Berücksichtigung der Kosten, etwaiger Transportrestriktionen o.ä.
 - **Investitionsplanung**
Bestimmung eines Investitionsprogramms für die kommenden Jahr zur Verwendung der zu erwartenden Überschüsse

Grundbegriffe des Operations Research (OR)

- Begriffsdefinition *Operations Research*:

Suche nach der bestmöglichen Lösung für ein vorgegebenes ökonomisches Problem unter Berücksichtigung von Nebenbedingungen.

- Bestandteile eines Optimierungsproblems
 - Zielfunktion
 - *Minimierung* *z.B. bei Kosten*
 - *Maximierung* *z.B. bei Gewinn/Deckungsbeitrag*
 - (Ggf. zu berücksichtigende) Nebenbedingungen

Überblick über Optimierungsprobleme

- **Fall 1:** Zielfunktion: $f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \min/\max$
ohne Nebenbedingungen

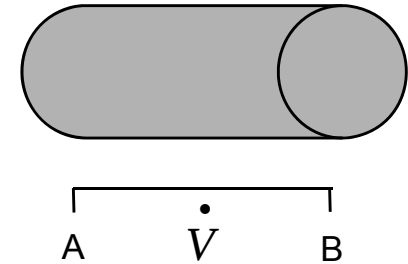
Notwendige Bedingung: $\delta f / \delta x_i = 0$

Hinreichende Optimalitätsbedingung: Lösung mit
Hilfe der Hesse-Matrix.

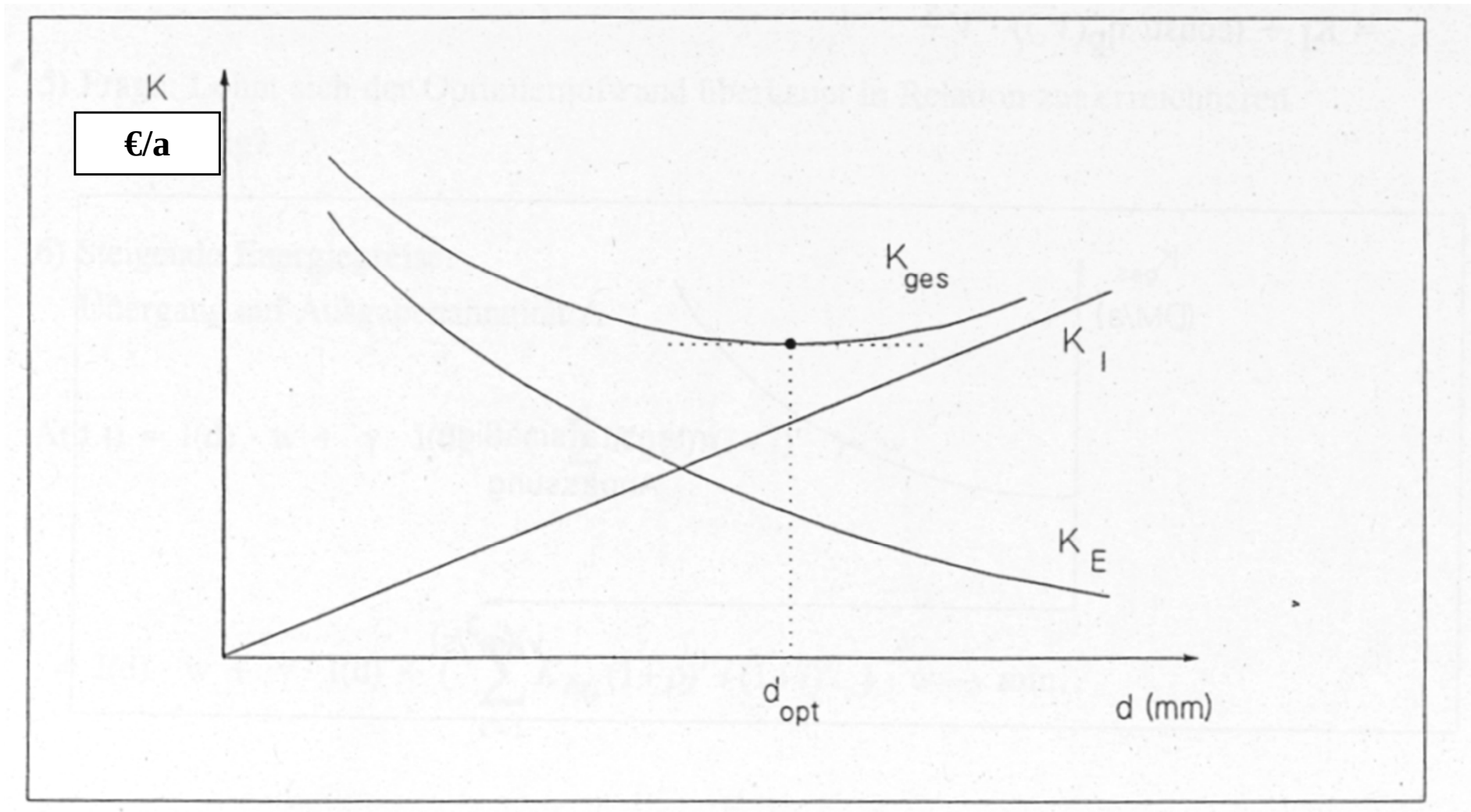
Analytische Optimierung

○ Beispiel: Optimierung einer Rohrleitung

- Annahmen:
 - inkompressible Flüssigkeit
 - stationär
 - Volumenstrom $\dot{V}$ [m³/s] gegeben
 - gerade Leitung
- Zielfunktion: Gesamtkosten K_{Ges} [€/a] $\rightarrow$ min!
- Optimierungsvariable: Durchmesser des Rohres d
 - $\rightarrow$ vom Durchmesser des Rohres hängen
 - a) die investitionsabhängigen Kostenarten (K_I) ab.
 - b) die Energiekosten (K_E) ab.



Analytische Optimierung

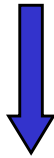


Überblick über Optimierungsprobleme

- **Fall 2:** Zielfunktion: $f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max/\min$
Nebenbedingungen als Gleichungssystem: $g_j(x_1, \dots, x_n) = b_j \quad j=1 \dots m$

Lösungsansatz nach **Lagrange**:

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot (g_j(x_1, \dots, x_n) - b_j) \rightarrow \max./\min.$$



$$\delta L / \delta x_i = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$\delta L / \delta \lambda_j = 0 \quad (j = 1, \dots, m)$$

Überblick über Optimierungsprobleme

- **Fall 3:** Zielfunktion: $f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max/\min$
mit Nebenbedingung in Form von Ungleichungen:
$$g_j(x_1, \dots, x_n) \neq 0 \quad j=1 \dots m$$

! Dieses Problem ist im Allgemeinen nicht lösbar.

! Aber: Sind f und g_j linear, dann:

Lineare Optimierung (LP)

Lineare Modelle

- Lineare Modelle sind charakterisiert durch

1. Lineare Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \rightarrow \min. / \max.$$

2. Lineare Nebenbedingungen

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} b_j \quad \text{für } j = 1..m$$

- Exakte Lösung linearer Modelle

- Grafische Lösung (bei 2 Variablen möglich)
- Algorithmen wie z.B. der von Dantzig entwickelte Simplex-Algorithmus

Lineare Optimierung

- Standard LP

$$\begin{array}{l} c^T x \rightarrow \max \\ \text{u.d.N. } Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \rightarrow \min. / \max.$$

Lineare Zielfunktion

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot x_i \begin{array}{l} \geq \\ \leq \end{array} b_j \quad \text{für } j = 1..m$$

Lineare Nebenbedingungen

- Ein LP ist dadurch gekennzeichnet, dass der zulässige Bereich ein konvexes Polyeder ist.
- Die Ecken des zulässigen Bereichs heißen zulässige Eckpunktlösungen. Es gilt:
 1. Es gibt eine **endliche Anzahl** zulässiger Eckpunktlösungen
 2. Mind. eine zul. Eckpunktlösung stellt eine **optimale Lösung** dar.
 3. Ist eine zulässige Eckpunktlösung **gleich oder besser als alle benachbarten** Eckpunktlösungen, ist sie auch **gleich oder besser als alle anderen zul. (Eckpunkt)Lösungen**

Landwirtbeispiel

	Kartoffeln	Getreide	zur Verfügung stehen
Anbaufläche [ha]	1	1	100 ha
Finanzielle Mittel [T€/ha]	1	2	110 T€
Arbeitstage pro Hektar	1	4	160 Tage
Reingewinn [T€/ha]	1	3	

Landwirtbeispiel

$x_1 = \text{Hektar mit Kartoffeln}$

$x_2 = \text{Hektar mit Getreide}$

Zielfunktion: $\text{Max } 1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$

Unter den Nebenbedingungen:

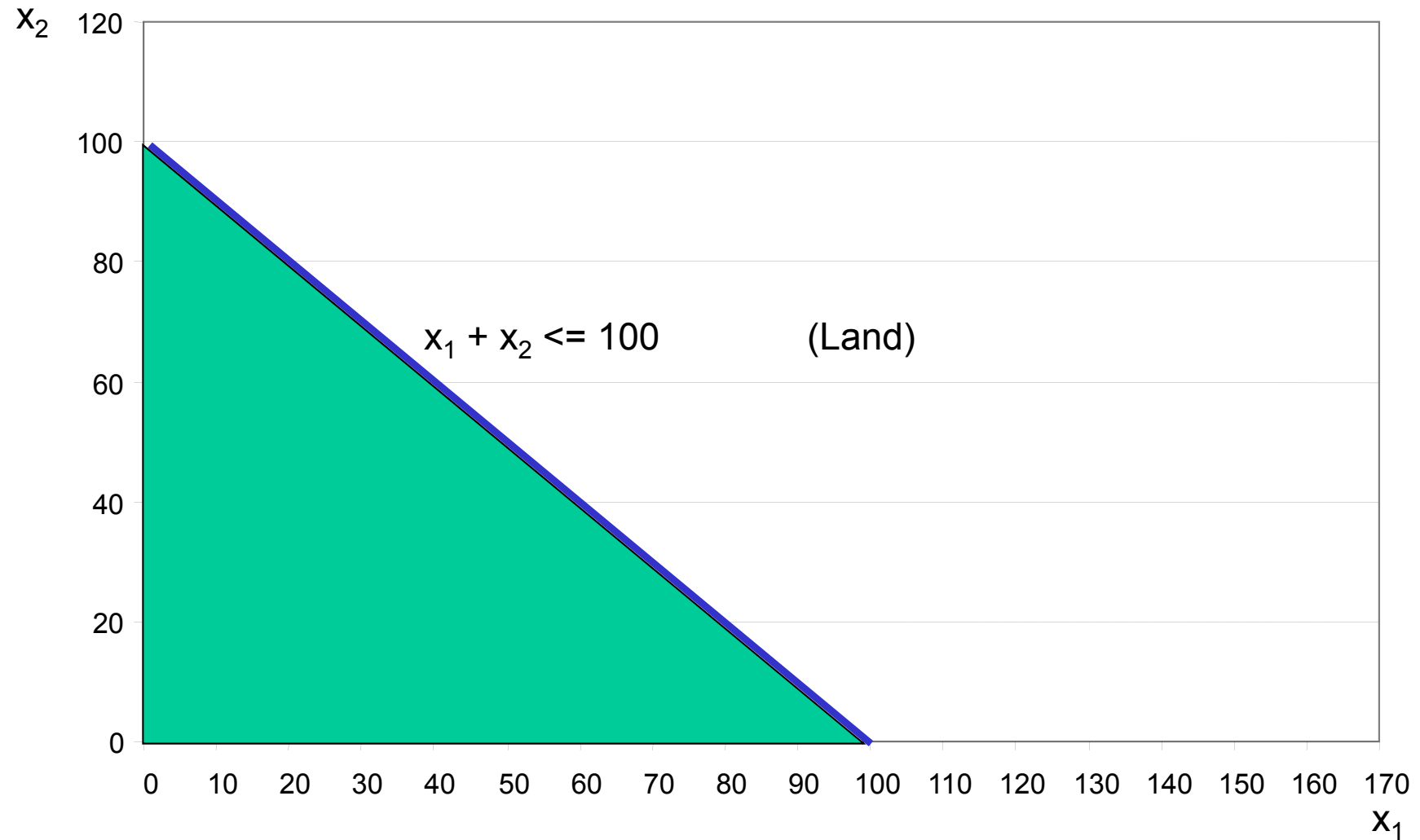
$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 110$$

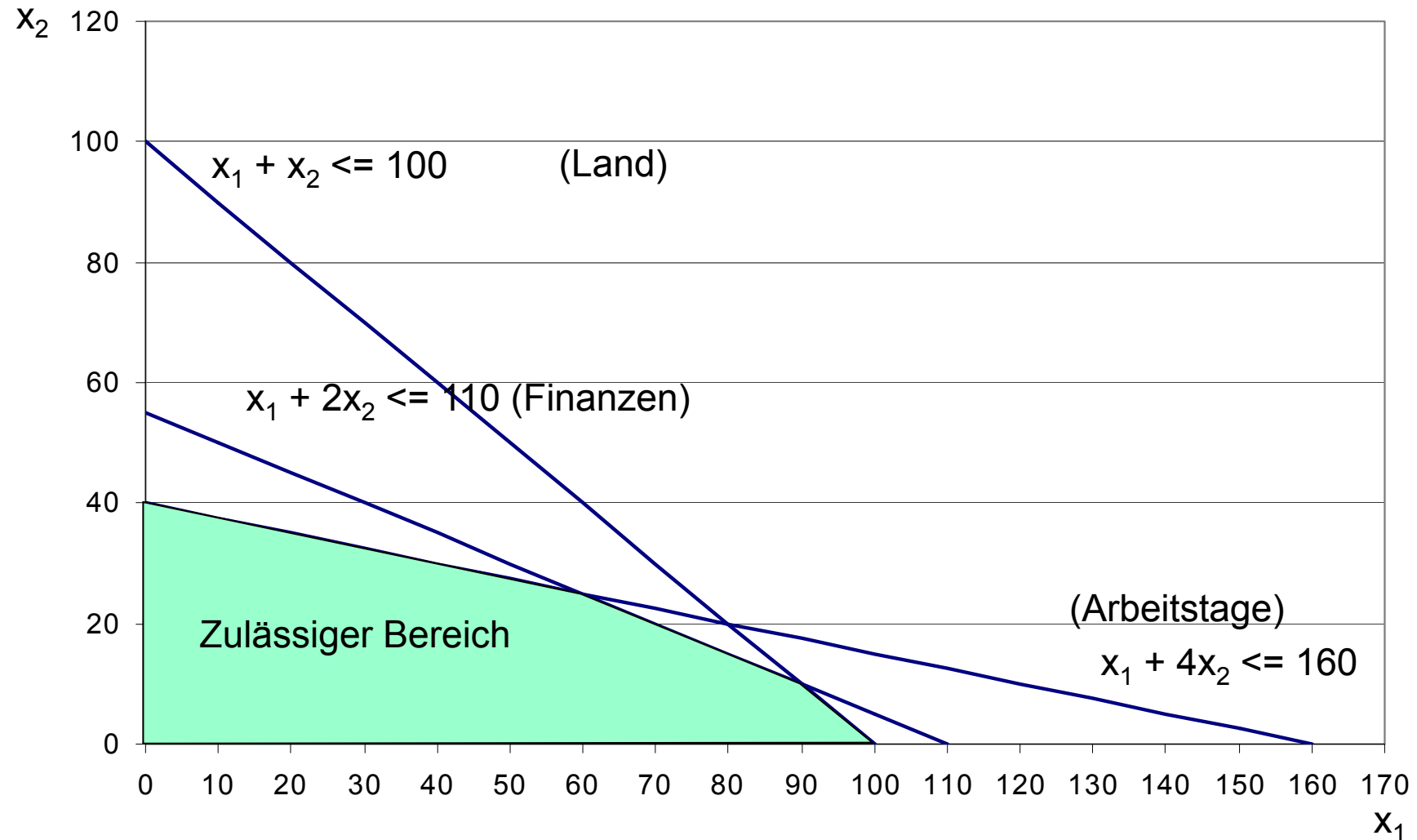
$$x_1 + 4x_2 \leq 160$$

$$x_i \geq 0, \forall i \in \{1,2\} \quad (\text{Nicht-Negativitätsbedingung})$$

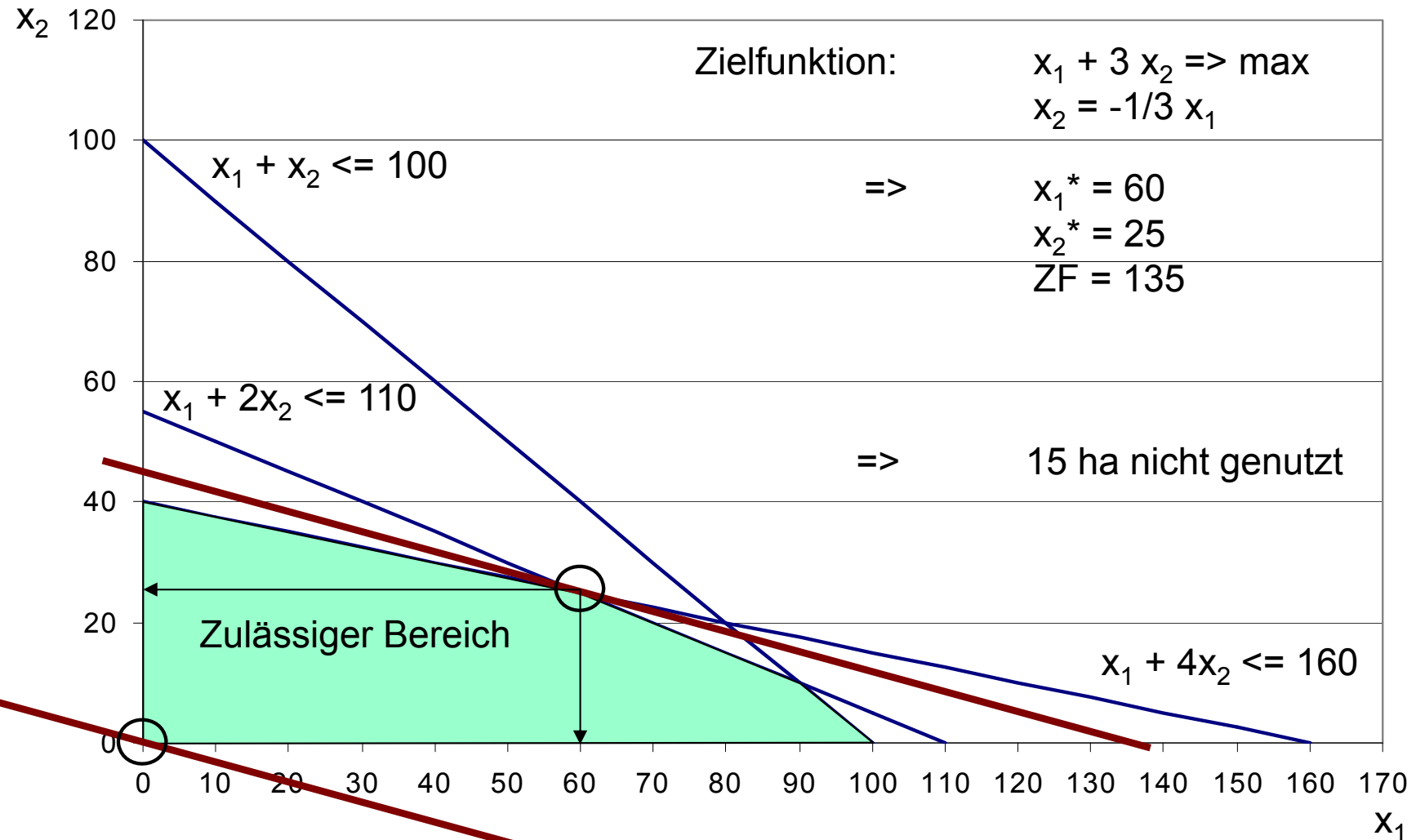
Grafische Darstellung des Optimierungsproblems



Grafische Darstellung des Optimierungsproblems



Grafische Darstellung des Optimierungsproblems



Simplex Algorithmus

- **grafische Lösung** kann nur im Zweidimensionalen angewendet werden
- **Der Simplex Algorithmus** kann auch im Mehrdimensionalen verwendet werden (mehr als zwei Entscheidungsvariablen)
 - nutzt die wichtige Eigenschaft eines linearen Programms, dass die Lösung immer eine Ecke ist,
 - beginnt mit einer zulässigen Lösung = eine Ecke des zulässigen Bereichs (meist Null)
 - ausgehend von diesem Ausgangspunkt (einer sog. Basislösung) wird von Eckpunkt zu Eckpunkt gesprungen, bis das Optimum erreicht ist
 - dabei wird immer nur dann und in die Richtung gesprungen, durch die der Zielfunktionswert verbessert wird.

Simplex Algorithmus: Standardform

- Formulierung des Problems in Standardform:

$$\begin{array}{lll} c^T x & \rightarrow \max & \\ A x & \leq & b \\ x & \geq & 0 \end{array}$$

- unser Beispiel hat bereits diese Form

$$x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 160$$

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_i \geq 0$$

Simplex Algorithmus: Einführen von Schlupfvariablen

Zielfunktion

$$x_1 + 3x_2$$

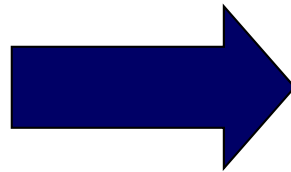
Nebenbedingungen

$$x_1 + 2x_2 \leq 110$$

$$x_1 + 4x_2 \leq 160$$

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_i \geq 0$$



Zielfunktion

$$x_1 + 3x_2$$

Nebenbedingungen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 110$$

$$x_1 + 4x_2 + x_4 = 160$$

$$x_1 + x_2 + x_5 = 100$$

$$x_i \geq 0$$

Simplex Algorithmus: Simplex Tableau

Zielfunktion: $x_1 + 3x_2$

Nebenbedingungen: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 110$

$x_1 + 4x_2 + x_4 = 160$

$x_1 + x_2 + x_5 = 100$

$x_i \geq 0$

Mögliche Lösung ?

Schlupfvariablen						
	b	x₁	x₂	x₃	x₄	x₅
x₃	110	1	2	1	0	0
x₄	160	1	4	0	1	0
x₅	100	1	1	0	0	1
	0	-1	-3	0	0	0

Koeffizienten von der linken Seite der Gleichungen

Wert der Zielfunktion

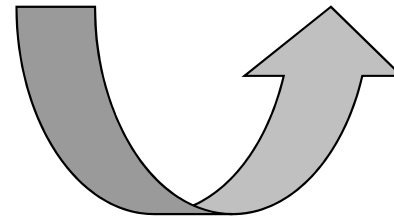
Koeffizienten der Zielfunktion multipliziert mit -1

Wert der Variablen, nicht aufgeführte Variablen haben den Wert Null

Simplex Algorithmus: Vorgehen

1. Transformation der Ungleichungen in Gleichungen
2. Zulässige Lösung
3. Übertragen in „Stenoschreibweise“
 - a) Pivotspalte
 - b) Pivotzeile
 - c) Aufstellen eines neuen Tableaus

wiederholen



Simplex Algorithmus: Vorgehen

- o finden des „negativsten“ Koeffizienten der Zielfunktion
 - Die zugehörige Spalte ist die **Pivotspalte**
- = in Richtung des steilsten Anstiegs gehen
- im Beispiel: Wert von x_2 erhöhen

- o Sicherstellen, dass die Lösung im zulässigen Bereich liegt
 - neue Spalte wird erstellt indem man die Werte der Variablen durch die positiven Werte in der Pivotspalte dividiert
 - Das Minimum dieser Werte bestimmt die **Pivotzeile**
- im Beispiel: das Minimum zeigt den maximalen Wert von x_2 an, der möglich ist ohne eine Nebenbedingung zu verletzen

Simplex Algorithmus: Vorgehen

Pivotelement

Pivotzeile

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	110	1	2	1	0	0	55 (= 110 : 2)
x_4	160	1	4	0	1	0	40 (= 160 : 4)
x_5	100	1	1	0	0	1	100 (= 100 : 1)
	0	-1	-3	0	0	0	

Pivotspalte

Simplex Algorithmus: Transformationsregeln

o Pivotelement:

$$a_{rs}' = 1$$

o Pivotspalte:

$$a_{is}' = 0 \quad \text{für alle } i \neq r$$

o Pivotzeile:

$$a_{rj}' = \frac{a_{rj}}{a_{rs}} \quad \text{für alle } j \neq s$$

o restliche Elemente:

$$a_{ij}' = a_{ij} - \left(\frac{a_{is} * a_{rj}}{a_{rs}} \right)$$

Simplex Algorithmus: Tableau nach der ersten Transformation

	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
x ₃	110	1	2	1	0	0	55
x ₄	160	1	4	0	1	0	40
x ₅	100	1	1	0	0	1	100
	0	-1	-3	0	0	0	

restliche Elemente:
 $a'_{ij} = a_{ij} - (a_{is} \cdot a_{rj} / a_{rs})$

$$a_{1b} = 110 - (2 \cdot 160 / 4) = 30$$

	b	x ₁	x ₂	x ₃	x ₄	x ₅	
x ₃	30	1/2	0	1	- 1/2	0	60
x ₂	40	1/4	1	0	1/4	0	160
x ₅		3/4	0	0	-1/4	1	80
	120	-1/4	0	0	3/4	0	

← Pivotzeile

Pivotspalte

$$-1 - \frac{1 \cdot (-3)}{4}$$

Simplex Algorithmus: Tableau nach der zweiten Transformation

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	30	1/2	0	1	- 1/2	0	60
x_2	40	1/4	1	0	1/4	0	160
x_5	60	3/4	0	0	-1/4	1	80
	120	-1/4	0	0	3/4	0	

Pivotelement:

$$a_{rs}' = 1$$

Pivotspalte:

$$a_{is}' = 0$$

Pivotzeile:

$$a_{rj}' = a_{rj} / a_{rs}$$

restliche Elemente:

$$a_{ij}' = a_{ij} - (a_{is} * a_{rj} / a_{rs})$$

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	60	1	0	2	- 1	0	
x_2	25	0	1	- 1/2	0	0	
x_5	15	0	0	- 3/2	-1	1	
	135	0	0	1/2	1/2	0	

Keine negativen
Koeffizienten in der letzten
Zeile

→ Die Zielfunktion kann nicht
mehr wachsen

→ optimale Lösung!!!

Simplex Algorithmus: Informationen im letzten Tableau

	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	60	1	0	2	-1	0
x_2	25	0	1	-1/2	0	0
x_5	15	0	0	-3/2	-1	1
	135	0	0	1/2	1/2	0

○ $x_1 = 60$, $x_2 = 25$

60 Hektar sollten mit
Kartoffeln bepflanzt
werden

25 Hektar mit
Getreide

- Ungleichung in der x_5 eingeführt wurde ist nicht restriktiv (Nebenbedingung Land)
- optimale Lösung ergibt 15 Hektar unbepflanztes Land aufgrund anderer Restriktionen
 - ➔ Restriktion ist nicht bindend im optimalen Punkt
- Schattenpreise (Opportunitätskosten): $\zeta_3 = \zeta_4 = 1/2$
 - Anstieg der Zielfunktion wenn eine Einheit mehr der Ressource vorhanden wäre, welche von der zugehörigen Einschränkung begrenzt ist
 - x_4 wurde für die Beschränkung der Arbeitstage eingeführt
 - ➔ 1 Tag mehr ➔ Erhöhung des Gewinns um $\frac{1}{2}$ T€

Zusammenfassung: Simplex Algorithmus

- nutzt die wichtige Eigenschaft eines linearen Programms, dass die Lösung immer eine Ecke ist
- beginnt mit einer zulässigen Lösung = eine Ecke des zulässigen Bereichs (meist Null)
- Für jede Ungleichung wird eine neue Variable (Schlupfvariable) eingeführt um die Ungleichung zu einer Gleichung zu machen
- springt von einer Ecke zur nächsten bis das Optimum erreicht ist

Zusammenfassung: Vorgehen beim Simplex Algorithmus

- o Problem in ein Simplex-Tableau überführen
- o Pivotspalte, -zeile und -element bestimmen
- o Simplex-Tableau mit folgenden Regeln transformieren
 - Pivotelement: $a_{rs}' = 1$
 - Pivotspalte: $a_{is}' = 0$ für alle $i \neq r$
 - Pivotzeile: $a_{rj}' = a_{rj} / a_{rs}$ für alle $j \neq s$
 - restliche Elemente: $a_{ij}' = a_{ij} - (a_{is} * a_{rj} / a_{rs})$
- o aufhören, wenn keine negativen Koeffizienten mehr in der letzten Zeile stehen
 - Zielfunktion kann nicht mehr wachsen
 - optimale Lösung gefunden!

Beispiel: Grundmodell der PPP (1)

Bestimmung des Produktionsprogramms unter Anwendung des Grundmodells der operativen Produktionsprogrammplanung

Die Ermittlung des Produktionsprogramms erfolgt in zwei Schritten:

- (1) Aufstellung eines Entscheidungsmodells (LP-Modell)
- (2) Bestimmung einer optimalen Entscheidung

Bezeichnet man mit

x_1 :	die zu produzierende Anzahl [Stück] Schlafzimmer,
x_2 :	die zu produzierende Anzahl [Stück] Wohnzimmer,
p_j :	den Erlös des Produktes j ,
k_j :	die variablen Kosten des Produktes j ,

so lassen sich die im Beispiel angegebenen Daten wie folgt zusammenfassen:

Beispiel: Grundmodell der PPP (2)

		Schlafzimmer x_1	Wohnzimmer x_2	Kapazitätsgrenze b_i
Erlös	p_j	9.000	19.500	
variable Kosten	k_j	7.000	16.000	
DB	d_j	2.000	3.500	
Potentialfaktor 1	a_{1j}	2	4	
Potentialfaktor 2	a_{2j}	2	2	180
Potentialfaktor 3	a_{3j}	0	3	150
Absatzobergrenze	A_j	60	10	

Beispiel: Grundmodell der PPP (3)

Das LP-Modell zur Bestimmung des Produktionsprogramms (x_1, x_2) läßt sich nun folgendermaßen formulieren:

$$\text{MAX } g(x_1, x_2) = 2000 \cdot x_1 + 3500 \cdot x_2$$

u.d.N.

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \leq 160 \quad (1)$$

$$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 \leq 180 \quad (2)$$

$$3 \cdot x_2 \leq 150 \quad (3)$$

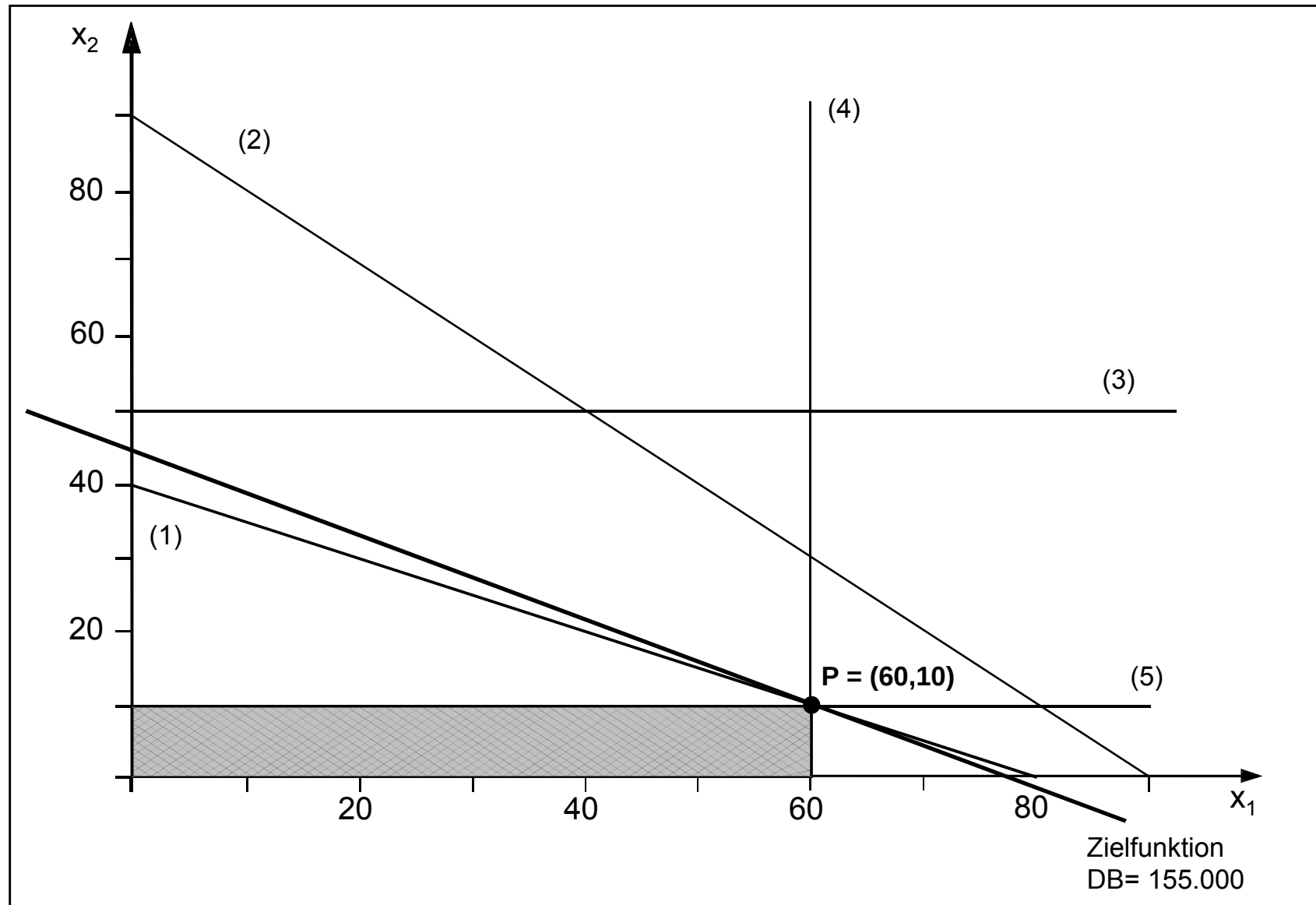
$$x_1 \leq 60 \quad (4)$$

$$x_2 \leq 10 \quad (5)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Da nur zwei Produkte und damit zwei Entscheidungsvariablen vorliegen, kann die optimale Lösung graphisch ermittelt werden:

Beispiel: Grundmodell der PPP (4)



Dualität

Primales Problem

$$\begin{aligned} c^T x &\rightarrow \max \\ Ax &\leq b \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Duales Problem

$$\begin{aligned} b^T y &\rightarrow \min \\ A^T y &\geq c \\ y_i &\geq 0 \end{aligned}$$

- Schattenpreise des primalen Problems sind die optimale Lösung des dualen Problems

Beispiel: Anwendung der Dualitätseigenschaft

Problem:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{Nebenbed.} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 4 \\ & 2x_1 + x_3 \geq 5 \\ & x_i \geq 0 \end{array}$$

- Keine Standardform!
- Simplex kann nur bei Problemen in Standardform angewendet werden

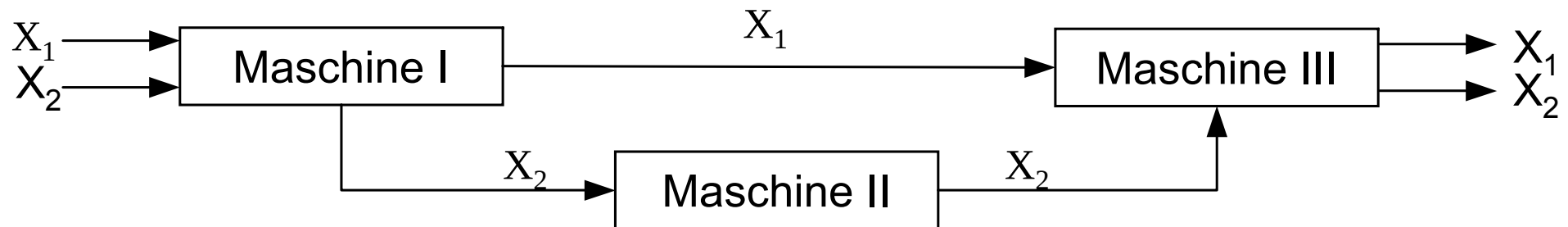
Transformation des Problems in Dualform

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & 4y_1 + 5y_2 \\ \text{Nebenbed.} & y_1 + 2y_2 \leq 1 \\ & 2y_1 \leq 1 \\ & 3y_1 + y_2 \leq 1 \\ & y_i \geq 0 \end{array}$$

- Standardform!
- Schattenpreise dieses Problems sind die optimale Lösung des Originalproblems

Übungsaufgabe

Auf drei Werkzeugmaschinen können zwei konkurrierende Produkte gemäß folgender technischer Verflechtung gefertigt werden:



Die Kapazitäten der Maschinen I, II und III [in ME/ZE] für die einzelnen Produkte sind in der folgenden Tabelle zusammengefasst:

	Maschine I	Maschine II	Maschine III
Produkt X_1	4	-	10/3
Produkt X_2	4	3	5

Von X_1 und X_2 kennen Sie den Verkaufspreis, die fixen und die variablen Kosten pro Stück:

- X_1 : 16 GE/ME, 7 GE/ME und 7 GE/ME
- X_2 : 22 GE/ME, 8 GE/ME und 10 GE/ME

In welcher Kombination sind die beiden Produkte zu fertigen, wenn der Deckungsbeitrag maximiert werden soll?